

VON QUADRATWURZELN, WÄHLERN UND SPINS

Werner Kirsch

Institut für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum



Kolloquium zum 55. Geburtstag von Hans Cycon

Copyrighted Material

Texts and
Monographs
in Physics

H.L. Cycon R.G. Froese W. Kirsch
B. Simon

Schrödinger Operators

with Applications to Quantum Mechanics
and Global Geometry

 Springer

Copyrighted Material

Der EU-Gipfel in Brüssel: Juni 2007



- Der Rat der EU ist (gemeinsam mit dem Europa-Parlament) das gesetzgebende Organ der EU.
- Der Rat (Ministerrat) besteht aus je einem Regierungsvertreter der Mitgliedsstaaten.
- Traditionell haben die Vertreter im Rat ein Stimmgewicht, das von der Bevölkerungsgröße des jeweiligen Landes abhängt.

Beispiel: Ministerrat vor der Osterweiterung

Deutschland	10
Frankreich	10
UK	10
Italien	10
Spanien	8
Niederlande	5
Griechenland	5
Portugal	5

Belgien	5
Schweden	4
Österreich	4
Dänemark	3
Finnland	3
Irland	3
Luxemburg	2

Quorum 71,2%
mindestens 62 aus 87 Stimmen

Qualifizierte Mehrheit

1 Verfahren von Nizza

- Mehrheit der Staaten
- Qualifizierte Mehrheit der Stimmgewichte
- Mindestens 62 % der Bevölkerung

2 Doppelte Mehrheit

- Mindestens 55 % der Staaten
- Mindestens 65 % der Bevölkerung

Stimmgewichte nach Nizza

Staat	Bev.	Stimmen
Deutschland	82,5	29
Frankreich	59,6	29
UK	59,3	29
Italien	57,3	29
Spanien	41,6	27
Polen	38,2	27
Rumänien	21,8	14
Niederlande	16,2	13
Griechenland	11,0	12
Portugal	10,4	12
Belgien	10,4	12
Tschechien	10,2	12
Ungarn	10,1	12
Schweden	8,9	10

Staat	Bev.	Stimmen
Österreich	8,1	10
Bulgarien	7,9	10
Dänemark	5,4	7
Slowakei	5,4	7
Finnland	5,2	7
Irland	4,0	7
Litauen	3,5	7
Lettland	2,3	4
Slowenien	2,0	4
Estland	1,4	4
Zypern	0,7	4
Luxemburg	0,5	4
Malta	0,4	3
Summe	484,3	345

Quorum 255 Stimmen oder 258 ?

1 Verfahren von Nizza

- Mehrheit der Staaten
- Qualifizierte Mehrheit der Stimmgewichte
- Mindestens 62 % der Bevölkerung

2 Doppelte Mehrheit

- Mindestens 55 % der Staaten
- Mindestens 65 % der Bevölkerung



... oder Tod !

The square root of all the European Union's problems Financial Times, June 12, 2007

The Poles' slogan for the summit - "the square root or death" - neatly combines obscurity, absurdity and vehemence, ...

Almost nobody else wants the baffling square root system, but the Poles have the power to block any agreement.

"The Poles really could bring the whole thing crashing down," says a senior British diplomat ...

Der EU-Gipfel in Brüssel: Juni 2007

Gipfelergebnis



Trotzdem: Was ist das Quadratwurzelsystem ?

- Man nehme für jeden Staat seine Bevölkerung in Millionen, also z.B. Deutschland 81, Polen 36 usw.
- Man ziehe daraus die Quadratwurzel (=Wurzel), also z.B. $\sqrt{81} = 9$ für Deutschland, oder $\sqrt{36} = 6$.
- Diese Zahlen ergeben die Stimmgewichte.
- Man setze das Quorum auf 61%.

Damit ergibt sich ein gewichtetes Abstimmungssystem.

Deutschland	4
Frankreich	4
Italien	4
Niederlande	2
Belgien	2
Luxemburg	1
Quorum: 70 % mindestens 12 Stimmen	

Fazit: Luxemburg hat keinerlei Einfluss.

- Ein Zusammenschluss von Wählern (Abgeordnete, Mitglieder eines Gremiums) heißt **Koalition**.
- Es gibt 2^N Koalitionen. Jeder Wähler ist an 2^{N-1} Koalitionen beteiligt.
- Eine Koalition K heißt **gewinnend**, wenn sie einen Beschluss durchsetzen kann (über eine ausreichende Mehrheit verfügt).
- Ein Wähler w in einer Koalition K heißt **entscheidend** (für K), wenn K mit w gewinnend ist, aber ohne w verlierend ist.

- Für jeden Wähler w zählen wir die Anzahl $\eta(w)$ der Koalitionen, in denen er entscheidend ist.
- Dann ergibt

$$\beta(w) = \frac{\eta(w)}{2^{N-1}}$$

den Anteil der Koalitionen, für die w entscheidend ist, unter allen Koalitionen, an denen w beteiligt ist. Wir nennen diese Zahl die totale **Banzhafmacht** von w .

- Den (prozentualen) Anteil eines Wählers w an der Macht aller Wähler nennen wir den **Banzhaf-Index** oder den **Machtindex** $B(w)$ von w .

Machtverhältnisse: Nizza und 'doppelte Mehrheit'

Staat	Bev.	Nizza	R.V.	Staat	Bev.	Nizza	R.V.
Deutschland	82,5	7,78	11,87	Österreich	8,1	3,09	2,52
Frankreich	59,6	7,78	8,73	Bulgarien	7,9	3,09	2,50
UK	59,3	7,78	8,69	Dänemark	5,4	2,18	2,19
Italien	57,3	7,78	8,44	Slowakei	5,4	2,18	2,19
Spanien	41,6	7,42	6,38	Finnland	5,2	2,18	2,17
Polen	38,2	7,42	5,89	Irland	4,0	2,18	2,02
Rumänien	21,8	4,26	4,22	Litauen	3,5	2,18	1,96
Niederlande	16,2	3,97	3,51	Lettland	2,3	1,25	1,81
Griechenland	11,0	3,68	2,87	Slowenien	2,0	1,25	1,78
Portugal	10,4	3,68	2,80	Estland	1,4	1,25	1,70
Belgien	10,4	3,68	2,80	Zypern	0,7	1,25	1,62
Tschechien	10,2	3,68	2,78	Luxemburg	0,5	1,25	1,59
Ungarn	10,1	3,68	2,76	Malta	0,4	0,94	1,58
Schweden	8,9	3,09	2,62	Summe	484,3	100,00	100,00

Vergleich der Systeme

	Bev.	Nizza	Ref.v.	QW		Bev.	Nizza	Ref.v.	QW
DE	82,5	7,78	11,87	9,54	AT	8,1	3,09	2,52	2,98
FR	59,6	7,78	8,73	8,11	BG	7,9	3,09	2,50	2,94
GB	59,3	7,78	8,69	8,09	DK	5,4	2,18	2,19	2,44
IT	57,3	7,78	8,44	7,95	SK	5,4	2,18	2,19	2,44
ES	41,6	7,42	6,38	6,77	FI	5,2	2,18	2,17	2,40
PL	38,2	7,42	5,89	6,49	IE	4,0	2,18	2,02	2,09
RO	21,8	4,26	4,22	4,90	LT	3,5	2,18	1,96	1,95
NL	16,2	3,97	3,51	4,23	LV	2,3	1,25	1,81	1,60
GR	11,0	3,68	2,87	3,49	SI	2,0	1,25	1,78	1,48
PT	10,4	3,68	2,80	3,39	EE	1,4	1,25	1,70	1,22
BE	10,4	3,68	2,80	3,38	CY	0,7	1,25	1,62	0,89
CZ	10,2	3,68	2,78	3,36	LU	0,5	1,25	1,59	0,70
HU	10,1	3,68	2,76	3,34	MT	0,4	0,94	1,58	0,66
SE	8,9	3,09	2,62	3,14		484,3	100	100	100

Vergleich der Systeme

Staat	Nizza	Reform-V.
Deutschland	-18,45	24,34
Frankreich	-4,05	7,67
UK	-3,81	7,44
Italien	-2,14	6,06
Spanien	9,58	-5,74
Polen	14,26	-9,35
Rumänien	-13,10	-13,89
Niederlande	-5,98	-17,00
Griechenland	5,66	-17,56
Portugal	8,69	-17,35
Belgien	8,99	-17,12
Tschechien	9,80	-17,23
Ungarn	10,15	-17,34
Schweden	-1,54	-16,62

Staat	Nizza	Reform-V.
Österreich	3,63	-15,50
Bulgarien	5,08	-15,15
Dänemark	-10,52	-10,04
Slowakei	-10,48	-10,00
Finnland	-9,01	-9,54
Irland	4,32	-3,29
Litauen	11,57	0,30
Lettland	-22,05	13,07
Slowenien	-15,74	19,72
Estland	2,21	39,22
Zypern	40,26	81,38
Luxemburg	77,76	126,34
Malta	42,30	138,56

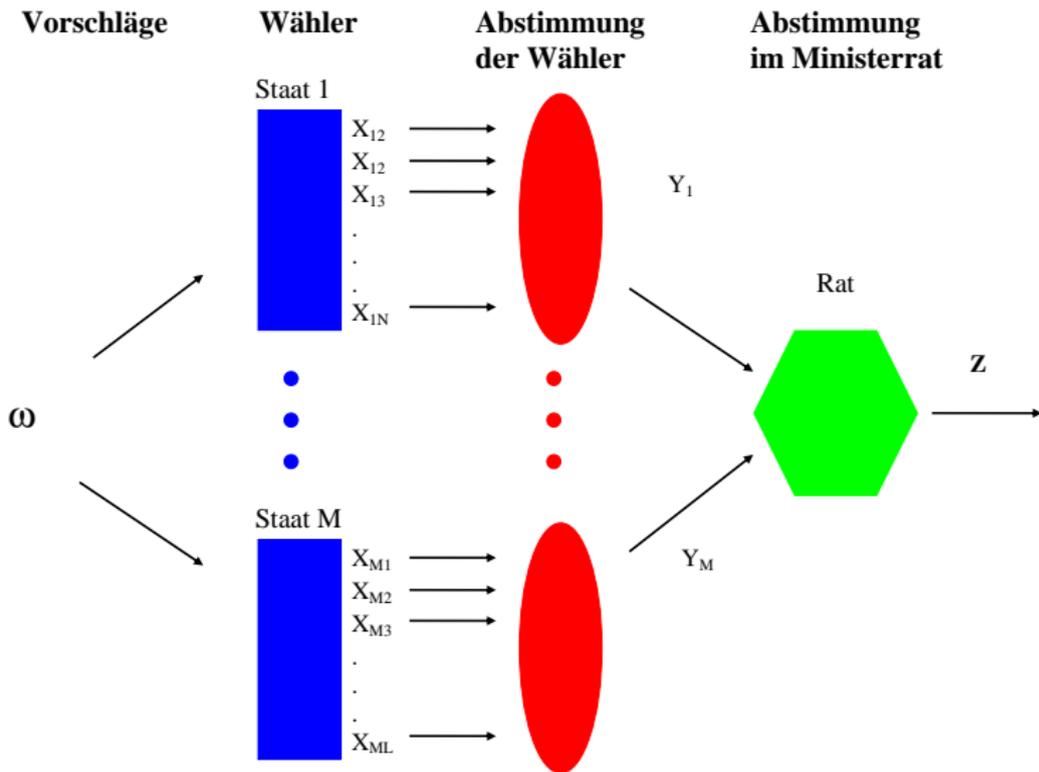
Was ist ein gerechtes Abstimmungssystem ?

Grundannahme: Repräsentative Demokratie funktioniert!

- Die Regierungen vertreten im Rat die Interessen ihrer Bürger.
- Die Regierungen wissen, wie die Mehrheit in ihrem Land in der zur Abstimmung stehenden Frage denkt.
- Die Regierungen stimmen so ab, wie die Mehrheit in ihrem Land möchte.

Damit ist das System Wähler – Ministerrat ein zusammengesetztes Abstimmungssystem, in dem die Wähler (indirekt) Einfluss ausüben. Wir können daher von der **Macht eines Wählers** bei Abstimmungen im Rat sprechen.

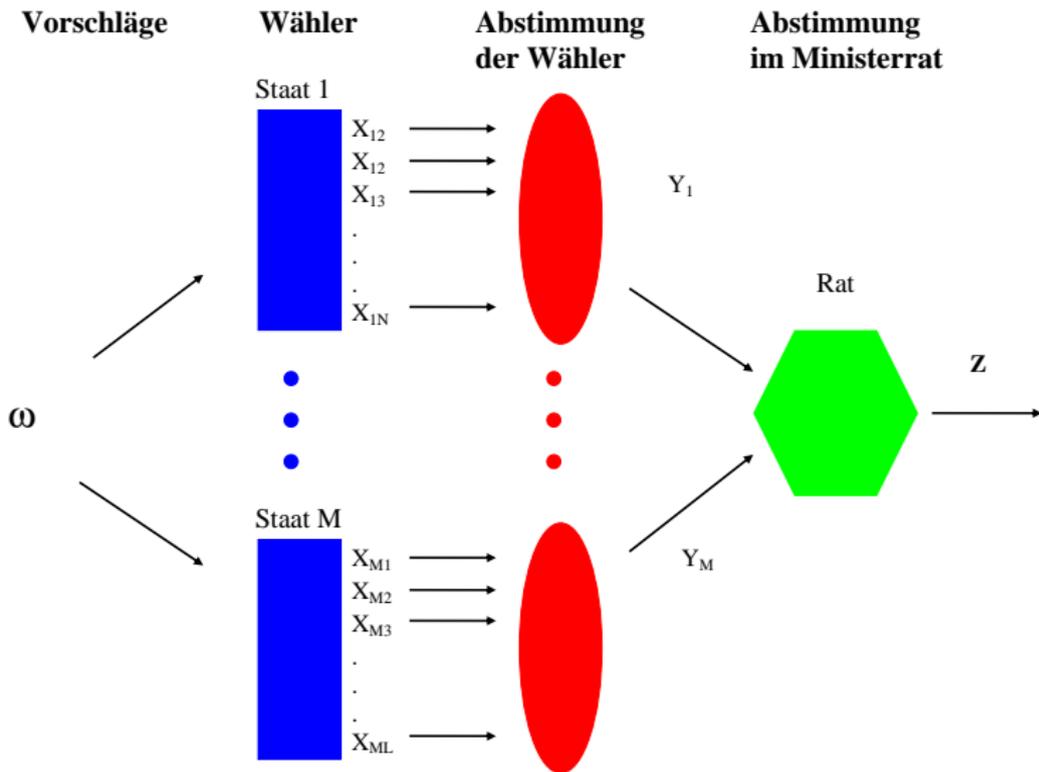
Schematische Darstellung



Das Model

- Es gibt M Staaten (Untereinheiten): S_1, \dots, S_M , die eine Zusammenschluss (Union) bilden.
- Staat S_ν has N_ν Wähler.
- Das Wahlverhalten des Wählers i im Staat S_ν ist $X_{\nu i}$.
- $X_{\nu i} = 1$ steht für 'JA' und $X_{\nu i} = -1$ für 'NEIN'.
- $X_{\nu i} = X_{\nu i}(\omega)$ hängt vom *Abstimmungsgegenstand*, dem Vorschlag ω ab.

Schematische Darstellung



Aus dem Abstimmungsverhalten der Wähler ergibt sich die Mehrheitsmeinung im Staat S_ν aus:

$$X_\nu = \sum_{i=1}^{N_\nu} X_{\nu i}$$

Sie ist 'JA' wenn $X_\nu > 0$.

Analog ergibt sich die Mehrheitsmeinung (Popular Vote) in der Union aus:

$$X = \sum_{\nu=1}^M X_\nu = \sum_{\nu=1}^M \sum_{i=1}^{N_\nu} X_{\nu i}$$

Nach unserer Grundannahme stimmt der Vertreter von S_ν im Rat so, wie es die Mehrheit in S_ν erwartet.

Also ist das Abstimmungsergebnis im Rat:

$$Z = \sum_{\nu=1}^M g_\nu \chi(X_\nu) = \sum_{\nu=1}^M g_\nu \chi\left(\sum_{i=1}^{N_\nu} X_{\nu i}\right)$$

$$\text{wobei } \chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ -1 & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

Die Größe

$$\Delta = |Z - X|$$

heißt das **Demokratiedefizit**.

Wir möchten die Stimmgewichte g_ν im Rat so wählen, dass das Demokratiedefizit so klein wie möglich ist.

Minimierungs-Aufgabe

Finde die g_ν so dass

$$\Delta = \Delta(g_1, \dots, g_\nu)$$

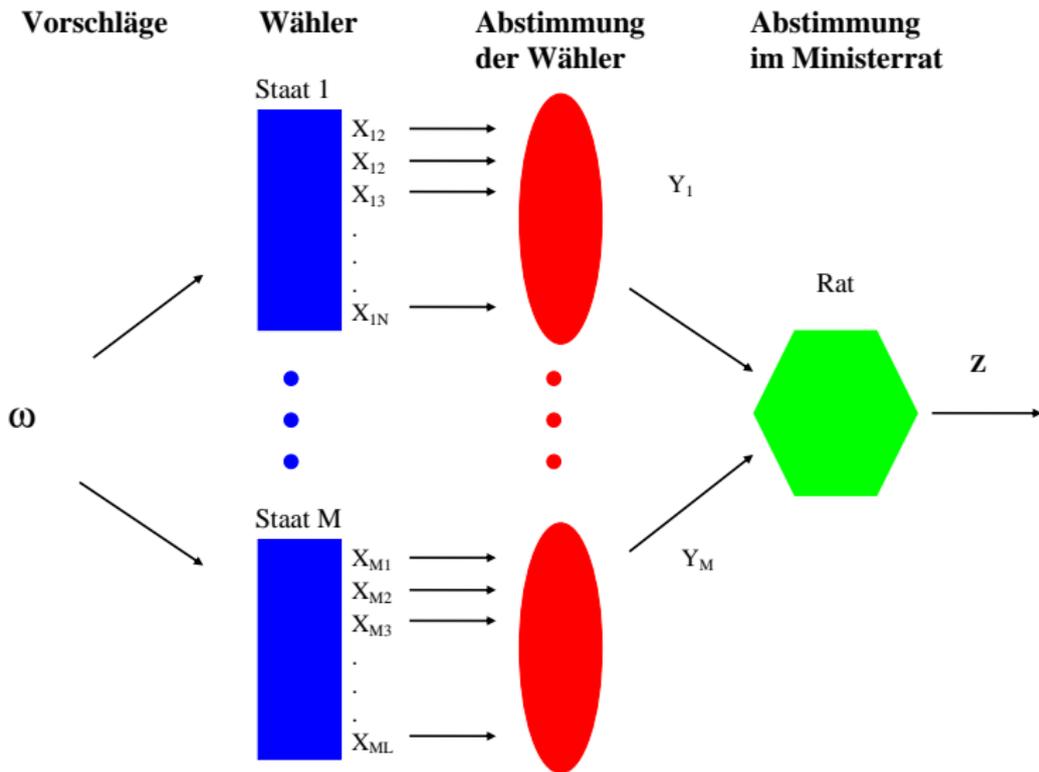
miminal ist.

Wir suchen die optimalen Gewichte g_ν so, dass das Demokratiedefizit **im Mittel** möglichst klein ist. Genauer: Wir wollen die g_ν so bestimmen, dass die mittlere quadratische Abweichung des Ratsvotums vom Bevölkerungsvotum minimal ist:

$$\mathbb{E}(\Delta^2) = \mathbb{E}(|Z - X|^2)$$

\mathbb{E} ist der erwartete Wert bezüglich einer Wahrscheinlichkeit \mathbb{P} , die wir noch spezifizieren müssen.

Schematische Darstellung



Annahmen

- 1 Die Vorschläge ω sind zufällig.
- 2 Wir nehmen an, dass jeder Vorschläge ω und sein Gegenteil $\bar{\omega}$ mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten.
- 3 Die Wähler reagieren in rationaler Weise auf die Vorschläge, insbesondere:

$$X_{\nu i}(\bar{\omega}) = -X_{\nu i}(\omega)$$

Daraus folgt

$$\mathbb{P}(\{X_{\nu i}\} = \{a_{\nu i}\}) = \mathbb{P}(\{X_{\nu i}\} = \{-a_{\nu i}\})$$

insbesondere:

$$\mathbb{P}(X_{\nu i} = 1) = \mathbb{P}(X_{\nu i} = -1) = \frac{1}{2}$$

Annahmen II

Unabhängigkeit

Die Abstimmungsergebnisse in *verschiedenen Staaten* sind unabhängig voneinander:

$X_{\nu i}$ and $X_{\kappa j}$ sind (stochastisch) unabhängig, falls $\nu \neq \kappa$

Ergebnis

Die *optimalen* Gewichte g_ν sind gegeben durch:

$$g_\nu = \mathbb{E}(|X_\nu|) = \mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{N_\nu} X_{\nu i}\right|\right)$$

Problem

Berechne $\mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^N X_i\right|\right)$!

Annahme

Die X_i sind ebenfalls unabhängig.

Ergebnis

$$g_\nu = \mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^N X_i\right|\right) \sim \sqrt{N}$$

Wähler als 'Spins'

- Statt die Werte $X_i = 1, -1$ als 'JA' oder 'NEIN' zu interpretieren, könnten wir uns auch kleine Elementarmagnete (Spins) vorstellen, die nach 'oben' oder 'unten' ausgerichtet sind.
- Damit stehen Modelle der statistischen Mechanik zur Verfügung, z.B. das **Curie-Weiss-Modell** des Magnetismus.
- Die Spins (Wähler) interagieren miteinander und versuchen eine gemeinsame Richtung (Meinung) zu finden. Die Stärke der Wechselwirkung wird durch einen Parameter $J \geq 0$ beschrieben.

Das Curie-Weiss-Modell

$$\mathbb{P}(X_1 = a_1, \dots, X_N = a_N) = Z^{-1} e^{-\beta H(a_1, \dots, a_N)}$$

$$H(a_1, \dots, a_N) = -J \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N a_j \right) a_i$$

Ergebnis

- If $J < J_0$ then:

$$\mathbb{E}_{\mu_J} \left(\left| \sum_{i=1}^N X_i \right| \right) \sim \sqrt{N}$$

- If $J > J_0$ then:

$$\mathbb{E}_{\mu_J} \left(\left| \sum_{i=1}^N X_i \right| \right) \sim N$$